PRIMENA DIFERENCIJALNOG RAČUNA FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

§ 1. Tajlorova formula. Ekstremumi funkcija više promenljivih

Tajlorova formula

3242. $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$; razviti funkciju $f(x+h, y+k)$ po stepenima od h i k.

3243. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y + 4$; naći priraštaj koji dobija funkcija kad nezavisno promenljive, polazeći od vrednosti $x = 5$, $y = 6$, pređu na vrednosti $x = 5 + h$, $y = 6 + k$.

3244. $f(x, y) = \dfrac{xy^3}{4} - yx^3 + \dfrac{x^2y^2}{2} - 2x + 3y - 4$; naći priraštaj koji dobija funkcija kad nezavisno promenljive, polazeći od vrednosti $x = 1$, $y = 2$, pređu na vrednosti $x = 1 + h$, $y = 2 + k$. Zadržavajući članove do drugog stepena zaključno — izračunati $f(1{,}02;\ 2{,}03)$.

3245. $f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx$; razviti $f(x+h, y+k, z+l)$ po stepenima od h, k i l.

3246. Razviti $z = \sin x \sin y$ po stepenima razlika $\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ i $\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right)$; naći članove prvog i drugog stepena i R_2 (ostatak drugoga reda).

3247. Funkciju $z = x^y$ razviti po stepenima razlika $(x-1)$ i $(y-1)$ idući do članova trećeg stepena zaključno. Koristeći dobijeni rezultat izračunati $1{,}1^{1{,}02}$ (bez upotrebe tablica).

3248. $f(x, y) = e^x \sin y$; razviti $f(x+h, y+k)$ po stepenima od h i k zadržavajući članove do trećeg stepena po h i k zaključno. Koristeći dobijeni rezultat izračunati $e^{0{,}1} \sin 0{,}49\pi$.

3249. Naći nekoliko prvih članova Tajlorovog reda za funkciju $e^x \sin y$ razvijenu u okolini tačke $(0{,}0)$.

3250. Naći nekoliko prvih članova Tajlorovog reda za funkciju $e^x \ln(1+y)$ razvijenu u okolini tačke $(0{,}0)$.

U zadacima 3251 — 3256 date funkcije razviti u Tajlorov red za $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3251. $z=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$. **3252*.** $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$.

3253. $z=\ln(1-x)\ln(1-y)$.

3254. $z=\ln\dfrac{1-x-y+xy}{1-x-y}$. **3255.** $z=\sin(x^2+y^2)$.

3256. $z=e^x\cos y$.

3257. Funkciju z definisanu implicitno jednačinom

$$z^3-yz-xy^2-x^3=0$$

za $x\neq 1$ i $y\neq 1$, i vrednošću $z=1$ za $x=y=1$, razviti u red po stepenima razlika $x-1$ i $y-1$ i naći nekoliko prvih članova toga reda.

3258. Izvesti približnu formulu

$$\frac{\cos x}{\cos y}\approx 1-\frac{1}{2}(x^2-y^2)$$

za dovoljno male vrednosti $|x|$ i $|y|$.

Lokalne ekstremne vrednosti

U zadacima 3259 — 3267 naći stacionarne tačke datih funkcija.

3259. $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$. **3260.** $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

3261. $z=xy(a-x-y)$. **3262.** $z=(2ax-x^2)(2by-y^2)$.

3263. $z=\sin x+\sin y+\cos(x+y)\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{4},\ 0<y<\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3264. $z=\dfrac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ **3265.** $z=y\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+y}$.

3266. $u=2x^2+y^2+2z-xy-xz$.

3267. $u=3\ln x+2\ln y+5\ln z+\ln(22-z-y-z)$.

3268. Na sl. 60 predstavljene su nivoske linije funkcije $z=f x, y)$. Kakve osobenosti pokazuje ova funkcija u Tačkama A, B, C, D, i na pravoj EF?

3269. Funkcija z definisana je implicitno jednačinom

$$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0.$$

Naći njene stacionarne tačke.

3270. Funkcija z definisana je implicitno jednačinom

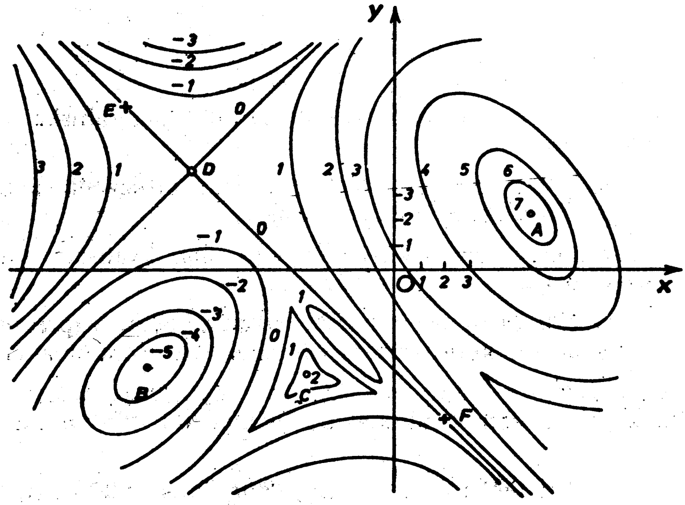
$$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0.$$

Naći njene stacionarne tačke.

3271*. Naći tačke ekstremuma funkcije

$$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$$

3272. Naći tačke ekstremuma funkcije $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$.



Sl. 60

3273. Naći tačke ekstremuma funkcije $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

3274. Uveriti se da funkcija $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ ima minimum u tački $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

3275. Uveriti se da za $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ i za $x = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ funkcija $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ ima minimum.

3276. Uveriti se da za $x = 5$, $y = 6$ funkcija $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ ima minimum.

3277. Naći stacionarne tačke funkcije $z = x^3 y^2 (12 - x - y)$, koje zadovoljavaju uslov $x > 0$, $y > 0$ i ispitati njihov karakter.

3278. Naći stacionarne tačke funkcije $z = x^3 + y^3 - 3xy$ i ispitati njihov karakter.

Ekstremne vrednosti u datoj oblasti

3279. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije $z = x^2 - y^2$ u krugu $x^2 + y^2 < 4$.

3280. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ u pravougaoniku $0 < x < 1$, $0 < y < 2$.

3281. Naći najveću vrednost funkcije $z = x^2 y (4 - x - y)$ u trouglu koji obrazuju prave $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

3282. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$ u krugu $x^2+y^2<4$.

3283. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije

$$z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$$

u pravougaoniku $0<x<\frac{\pi}{2}$; $0<y<\frac{\pi}{2}$.

3284. Pozitivan broj a razložiti na tri proizvoljna sabirka tako da njihov proizvod bude minimalan.

3285. Pozitivan broj a predstaviti u obliku proizvoda četiri pozitivna množitelja tako da njihov zbir bude minimalan.

3286. U ravni Oxy naći tačku za koju je zbir kvadrata odstojanja od pravih $x=0$, $y=0$, $x+2y-16=0$ minimalan.

3287. Kroz tačku (a, b, c) postaviti ravan tako da zapremina tetraedra koji ta ravan obrazuje sa koordinatnim ravnima, bude minimalna.

3288. Date su tačke $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$; u ravni Oxy naći tačku za koju će zbir kvadrata odstojanja od svih datih tačaka biti minimalan.

3289. Date su tri tačke $A(0, 0, 12)$, $B(0, 0, 4)$ i $C(8, 0, 8)$; u ravni Oxy naći tačku D tako da poluprečnik sfere koja prolazi kroz tačke $ABCD$ bude minimalan.

3290. U loptu prečnika $2R$ upisati pravougli paralelepiped maksimalne zapremine.

Uslovne ekstremne vrednosti

U zadacima 3291 — 3296 naći ekstremne vrednosti funkcija.

3291. $z=x^m+y^m$ $(m>1)$ za $x+y=2$ $(x>0,\ y>0)$.

3292. $z=xy$ za $x^2+y^2=2a^2$.

3293. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ za $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$.

3294. $z=a\cos^2x+b\cos^2y$ za $y-x=\frac{\pi}{4}$.

3295. $u=x+y+z$ za $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

3296. $u=xyz$ za $\begin{cases} 1) & x+y+z=5, \\ 2) & xy+xz+yz=8. \end{cases}$

3297*. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2.$$

3298. $f(x, y)=x^3-3xy^2+18y$, pri čemu je $3x^2y-y^3-6x=0$. Dokazati da funkcija $f(x, y)$ dostiže ekstremum u tačkama $x=y=\pm\sqrt{3}$.

3299. Naći minimum funkcije $u=ax^2+by^2+cz^2$, pri čemu su a, b, c pozitivne konstante, a x, y, z su vezani realizacijom $x+y+z=1$.

3300. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije

$$u=y^2+4z^2-4yz-2xz-2xy$$

pod uslovom $2x^2+3y^2+6z^2=1$.

3301. U ravni $3x-2z=0$ naći tačku za koju je zbir kvadrata odstojanja od $A(1, 1, 1)$ i $B(2, 3, 4)$ minimalan.

3302. U ravni $x+y-2z=0$ naći tačku za koju je zbir kvadrata odstojanja od ravni $x+3z=6$ i $y+3z=2$ minimalan.

3303. Date su tačke $A(4, 0, 4)$, $B(4, 4, 4)$, $C(4, 4, 0)$. Na površini lopte $x^2+y^2+z^2=4$ naći tačku S tako da zapremina piramide $SABC$ bude: a) maksimalna, b) minimalna. Proveriti tačnost rezultata metodama elementarne geometrije.

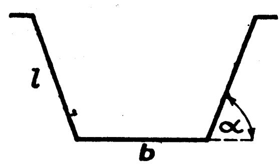
3304. Naći pravougli paralelepiped date zapremine V čija je površina minimalna.

3305. Naći pravougli paralelepiped date površine S čija je zapremina maksimalna.

3306. Naći zapreminu najvećeg pravouglog paralelepipeda koji se može upisati u elipsoid sa poluosama a, b i c.

3307. Šator date zapremine ima oblik cilindra sa konusnim završetkom. U kom odnosu moraju stajati dimenzije šatora da bi količina materijala, potrebnog za njegovu izradu, bila minimalna?

3308. Presek kanala ima oblik jednakokrakog trapeza date površine; kolike moraju biti njegove dimenzije da bi kvašena površina kanala bila najmanja? (sl. 61)



Sl. 61

3309. Od svih pravouglih paralelepipeda koji imaju datu dijagonalu naći onaj čija je zapremina maksimalna.

3310. Odrediti spoljne dimenzije otvorenog (bez poklopca) sanduka koji ima oblik pravouglog paralelepipeda sa datom debljinom zidova α i datom zapreminom V, tako da bi količina materijala potrebnog za njegovu izradu bila minimalna.

3311. Odrediti paralelepiped najveće zapremine čiji zbir svih 12 ivica ima datu vrednost $(12a)$.

3312. Oko date elipse opisati trougao najmanje površine, čija je osnovica paralelna velikoj osi elipse.

3313. Na elipsi $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ naći tačku čije je odstojanje od prave $3x-y-9=0$ minimalno, odnosno maksimalno.

3314. Na paraboli $x^2+2xy+y^2+4y=0$ naći tačku najbližu pravoj $3x-6y+4=0$.

3315. Na paraboli $2x^2-4xy+2y^2-x-y=0$ naći tačku najbližu pravoj $9x-7y+16=0$.

3316. Naći maksimalno odstojanje tačaka površine

$$2x^2+3y^2+2z^2=6$$

od ravni $z=0$.

3317. Naći stranice pravouglog trougla date površine S čiji je obim minimalan.

3318. U prav eliptični konus čije su poluose osnove a i b cm, a visina H cm, upisana je prizma sa pravougaonom osnovom tako da su osnovne ivice paralelne osama elipse, a presek dijagonala osnove leži u centru elipse. Kolike moraju biti osnovne ivice i visina prizme da bi njena zapremina bila maksimalna, i kolika je ta maksimalna zapremina?

3319. Naći pravilnu trostranu piramidu date zapremine, čiji je zbir svih ivica minimalan.

3320. Date su dve tačke elipse; odrediti položaj treće tačke elipse tako da površina trougla čija su temena pomenute tačke — bude maksimalna.

3321. Odrediti onu normalu elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ čije je odstojanje od koordinatnog početka maksimalno.

3322. Na obrtnom elipsoidu $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ naći tačku čije je odstojanje od ravni $3x+4y+12z=288$ minimalno, odnosno maksimalno.

3323. Date su ravne krive $f(x,\ y)=0$ i $\varphi(x,\ y)=0$. Pokazati da će rastojanje između tačaka $(\alpha,\ \beta)$ i $(\xi,\ \eta)$, od kojih prva leži na prvoj a druga na drugoj krivoj, imati ekstremnu vrednost ako su ispunjeni sledeći uslovi.

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}=\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}.$$

Koristeći se ovim rezultatom naći najkraće rastojanje između elipse $x^2+2xy+5y^2-16y=0$ i prave $x+y-8=0$.

§ 2. Ravne krive

Tangente i normale

U zadacima 3324 — 3327 napisati jednačine tangenata i normala datih krivih u datim tačkama.

3324. $x^3y+y^3x=3-x^2y^2$ u tački $(1,\ 1)$.

3325. $a^2(x^4+y^4)-x^3y^3=9a^6$ u tački $(a,\ 2a)$.

3326. $\cos xy=x+2y$ u tački $(1,\ 0)$.

3327. $2x^3-x^2y+3x^2+4xy-5x-3y+6=0$ u njenoj presečnoj tački sa y-osom.

Singularne tačke

U zadacima 3328 — 3340 naći singularne tačke datih krivih.

3328. $y^2=x^2(x-1)$. **3329.** $a^2x^2=(x^2+y^2)y^2$.

3330. $y^2=ax^2+bx^5$. **3331.** $y^2=x(x-a)^2$.

3332. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

3333. $x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0$.

3334. $x^4+12x^3-6y^3+36x^2+27y^2-81=0$.

3335. $x^3+y^3+3axy=0$. **3336.** $x^2+y^2=x^4+y^4$.

3337. $y=x\ln x$. **3338.** $y^2=\sin^3 x$. **3339.** $y^2=(x-a)^3$.

3340. $x^5=(y-x^2)^2$.

Obvojnice

3341. Naći jednačine obvojnica familije pravih $y=ax+f(a)$. Posebno, staviti $f(a)=\cos a$.

3342. Naći obvojnicu familije pravih $y=2mx+m^4$.

3343. Kroz tačku $A(a,\ 0)$ postavljen je snop pravih; naći obvojnicu familije normala na prave ovog snopa, povučenih u tačkama njihovog preseka sa y-osom.

3344. Naći obvojnicu familije parabola $y^2=a(x-a)$.

3345. Naći obvojnicu familije parabola $ax^2+a^2y=1$.

3346. Naći obvojnicu familije parabola $y=a^2(x-a)^2$.

3347. Naći obvojnicu familije semikubnih parabolaa $(y-a)^2=(x-a)^3$.

3348. Naći obvojnicu familije krivih $x^2+ay^2=a^3$.

3349. Naći obvojnicu familije elipsi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

pod uslovom da zbir poluosa svake elipse iznosi d.

3350. Poluprečnici kruga projektuju se na dva njegova uzajamno normalna prečnika, a nad tim projekcijama kao poluosama konstruišu se elipse; naći obvojnicu tako dobijene familije elipsi.

3351. Naći obvojnicu familije krugova čiji centri leže na paraboli $y=bx^2$ i prolaze kroz njeno teme.

3352. Prava se kreće tako da je zbir odsečaka koje ona odseca od koordinatnih osa konstantan i iznosi a; naći obvojnicu dobijene familije pravih.

3353. Naći obvojnicu prečnika kruga koji se kotrlja (bez klizanja) po datoj pravoj (poluprečnik kruga je R).

3354. Nad tetivama kruga (poluprečnika R), datog pravca, — kao prečnicima, konstruišu se krugovi; naći obvojnicu tako dobijene familije krugova.

3355. Prava se kreće tako da je proizvod odsečka, koje ona odseca od koordinatnih osa, konstantan i iznosi a; naći obvojnicu ovih pravih.

3356. Pokazati da je svaka kriva obvojnica familije svojih tangenata.

3357. Pokazati da je evoluta krive obvojnica familije svojih normala. Naći evolutu parabole $y^2=2px$ kao geometrijsko mesto centara krivine i kao obvojnicu familije normala, i uporediti rezultate.

3358. Dokazati stav: Ako je kriva (A) obvojnica familije pravih $x\cos t+$ $+y\sin t-f(t)=0$ onda je evoluta krive (A) obvojnica familije pravih $x\sin t+$ $+y\cos t-f'(t)=0$.

3359. Poteg OM proizvoljne tačke M ravnostrane hiperbole $xy=1$ projektuje se na asimptote hiperbole; naći obvojnicu elipsi konstruisanih nad tim projekcijama kao poluosama.

§ 3. Vektorska funkcija skalarnog argumenta. Prostorne krive. Površi

Vektorska funkcija skalarnog argumenta

3360. Izvesti obrasce diferenciranja:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{uv})=\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\boldsymbol{v}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt},\quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}.$$

u kojima su $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ vektorske funkcije skalarnog argumenta t.

3361. Ako je $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, naći sledeće izvode:

$$\text{a) } \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}^2);\ \text{b) } \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right);\ \text{c) } \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right);\ \text{d) } \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right).$$

3362. Neka su za sve vrednosti argumenta t vektori $\boldsymbol{r}(t)$ i $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ kolinearni; dokazati da su i vektori $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$, $\dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}$, ..., $\dfrac{d^n\boldsymbol{r}}{dt^n}$ kolinearni vektoru $\boldsymbol{r}(t)$.

3363. Dokazati da: ako intenzitet $|\boldsymbol{r}|$ vektor — funkcije $\boldsymbol{r}(t)$ ostaje konstantan za sve vrednosti argumenta t onda je $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\perp\boldsymbol{r}$. (Kakav je geometrijski smisao ove činjenice?) Da li važi i obrnuta teorema?

3364. Neka je $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos\omega t+\boldsymbol{b}\sin\omega t$, pri čemu su ω, $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ konstante. Dokazati da je

$$1)\ \boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\omega\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ \text{ i }\ 2)\ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+\omega^2\boldsymbol{r}=0.$$

3365. Dokazati da: ako je $\boldsymbol{e}$ jedinični vektor vektora $\boldsymbol{E}$, onda je $\boldsymbol{e}\times d\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{E}\times d\boldsymbol{E}}{E^2}$

3366. Dokazati da ako je $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}e^{\omega t}+\boldsymbol{b}e^{-\omega t}$, pri čemu su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ konstantni vektori, onda je

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}-\omega^2\boldsymbol{r}=0.$$

3367. $\boldsymbol{u}=\alpha(x, y, z, t)\boldsymbol{i}+\beta(x, y, z, t)\boldsymbol{j}+\gamma(x, y, z, t)\boldsymbol{k}$, pri čemu su x, y, z funkcije od t; dokazati da je

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

3368. Ako je $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$, $u=\varphi(x)$, izraziti izvode $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dx}, \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dx^2}, \dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{dx^3}$ pomcću $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{du}, \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{du^2}, \dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{du^3}$.

3369. Dokazati da ako vektorska funkcija $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ zadovoljava uslov $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\alpha\boldsymbol{r}$ ($\alpha=\text{const}$), onda je hodograf funkcije $\boldsymbol{r}(t)$ poluprava koja polazi iz pola.

3370. Neka je funkcija $\boldsymbol{r}(t)$ definisana, neprekidna i diferencijabilna u intervalu (t_1, t_2) i neka je uz to $\boldsymbol{r}(t_1)=\boldsymbol{r}(t_2)$; primeniti Rolovu teoremu na funkciju $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}$ u kojoj je $\boldsymbol{a}$ proizvoljni konstantan vektor, i rezultat objasniti geometrijski.

3371. Neka je $\boldsymbol{r}\{a\sin t, -a\cos t, dt^2\}$ vektor položaja pokretne tačke u prostoru (t je vreme, a i b su konstante); naći hodografe brzine i ubrzanja.

3372. Naći trajektoriju pokretne tačke čiji vektor položaja $\boldsymbol{r}$ zadovoljava uslov

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r},$$

u kojem je $\boldsymbol{a}$ konstantan vektor.

3373. Materijalna tačka se kreće po zakonu

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

($\boldsymbol{r}$ je vektor položaja pokretne tačke u trenutku t, a $\boldsymbol{v}_0$ i $\boldsymbol{g}$ su dati vektori); pokazati: 1) da je kinetička energija materijalne tačke kvadratna funkcija vremena; 2) da je $\boldsymbol{v}_0$ početna brzina (tj. vrednost vektora brzine za $t=0$); 3) da je ubrzanje pokretne tačke konstantno i jednako vektoru $\boldsymbol{g}$; 4) da se tačka kreće po paraboli (osim u slučaju kad su vektori $\boldsymbol{v}_0$ i $\boldsymbol{g}$ kolinearni) čija je osa simetrije paralelna vektoru $\boldsymbol{g}$.

3374. Vektor položaja pokretne materijalne tačke dat je obrascem:

$$=\boldsymbol{a}\cos t+\boldsymbol{b}\sin t+\boldsymbol{c}$$

u kojem su a i b uzajamno normalni konstantni vektori, c — konstantan vektor, a t — vreme; odrediti trajektoriju tačke. U kojim će momentima brzina kretanja imati ekstremnu vrednost? U kojim će momentima ubrzanje tačke imati ekstremnu vrednost?

3375. Formule transformacije dekartovih kordinata tačke M u sferne glase: $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$, pri čemu je $\rho=|\overrightarrow{OM}|$, $\theta=\sphericalangle(z, \overrightarrow{OM})$, $\varphi=\sphericalangle(x, \overrightarrow{OM'})$ (O je koordinatni početak, a M' — projekcija tačke M na ravan Oxy); naći komponente vektora brzine tačke M, razloženog po pravcima jediničnih (uzajamno normalnih) vektora e_ρ, e_θ, e_φ.

Prostorne krive linije

U zadacima 3376 — 3383 sastaviti jednačine tangente i normalne ravni za date krive u navedenim tačkama.

3376. $r\left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right)$, t. e. $x=\frac{t^4}{4}$, $y=\frac{t^3}{3}$, $z=\frac{t^2}{2}$, u proizvoljnoj tački.

3377. $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=\frac{k}{2\pi}\varphi$ u tački $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{k}{8}\right)$. Dokazati da tangenta u svakoj tački te krive zaklapa sa Oz osom isti ugao.

3378. $x=at$, $y=\frac{1}{2}at^2$, $z=\frac{1}{3}at^3$ u tački $(6a, 18a, 72a)$.

3379. $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$ u tački $\left(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2}\right)$.

3380. $y^2+z^2=25$, $x^2+y^2=10$ u tački $(1, 3, 4)$.

3381. $2x^2+3y^2+z^2=47$, $x^2+2y^2=z$ u tački $(-2, 1, 6)$.

3382. $x^2+y^2=z^2$, $x=y$ u tački (x_0, y_0, z_0).

3383. $x^3+z^3=a^3$, $y^3+z^3=b^3$ u proizvoljnoj tački.

3384. Na krivoj $r\{\cos t, \sin t, e^t\}$ naći tačku u kojoj je tangenta paralelna ravni

$$\sqrt{3}x+y-4=0.$$

U zadacima 3385 — 3387 sastaviti jednačine oskulatorne ravni, glavne normale i binormale za date krive u navedenim tačkama.

3385. $y^2=x$, $x^2=z$ u tački $(1, 1, 1)$.

3386. $x^2=2az$, $y^2=2bz$ u proizvoljnoj tački.

3387. $r\{e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\}$ u tački $(e, e^{-1}\sqrt{2}$

3388. Pokazati da tangente, glavne normale i binormale krive $r\{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$ zaklapaju sa z-osom konstantne uglove.

U zadacima 3389 — 3392 sastaviti jednačine tangente, normalne ravni, binormale, oskulatorne ravni, glavne normale i rektifikacione ravni za date krive u navedenim tačkama.

3389. $x=t^2,\ y=1-t,\ z=t^3$ u tački $(1,\ 0,\ 1)$.

3390, $x^2+y^2+z^2=3,\ x^2+y^2=2$ u tački $(1,\ 1,\ 1)$.

3391. $\boldsymbol{r}\{\sin t,\ \cos t,\ \operatorname{tg} t\}$ u tački $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$.

3392. $\boldsymbol{r}\{t^3-t^2-5,\ 3t^2+1,\ 2t^3-16\}$ u tački koja odgovara vrednosti parametra $t=2$.

3393. Pokazati da kriva $\boldsymbol{r}\{2t+3,\ 3t-1,\ t^2\}$ ima u svim tačkama istu oskulatornu ravan, i objasniti ovaj rezultat geometrijski

3394. Dokazati da je kriva

$$\boldsymbol{r}\{a_1t^2+b_1t+c_1,\ a_2t^2+b_2t+c_2,\ a_3t^2+b_3t+c_3\}$$

— ravna kriva, i sastaviti jednačinu ravni u kojoj ona leži.

3395. Naći poluprečnik torzije krive $\boldsymbol{r}\{\cos t,\ \sin t,\ \operatorname{ch} t\}$.

3396. Naći poluprečnik krivine krive $\boldsymbol{r}\{\ln\cos t,\ \ln\sin t,\ \sqrt{2}\,t\}$, $0<t<\frac{\pi}{2}$, i pokazati da je torzija u svakoj tački krive jednaka krivini krive u toj tački.

3397. Pokazati da je krivina krive $\boldsymbol{r}\{e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t\}$ (vidi zadatak 3388) u svakoj tački proporcionalna torziji.

3398. Izvesti obrazac za krivinu prostorne krive zadate jednačinama: $y=\varphi(x),\ z=\psi(x)$.

3399. Izraziti vektore $\vec{\tau}_1,\ \vec{\nu}_1,\ \vec{\beta}_1$ pomoću izvoda vektora položaja tačke na krivoj $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$.

3400. Izraziti svaki od vektora $\vec{\tau}_1,\ \vec{\nu}_1,\ \vec{\beta}_1$ pomoću ostala dva.

3401. Naći vektor $\vec{\omega}(s)$ (Darbu-ov vektor) koji zadovoljava uslove

$$\frac{d\vec{\tau}_1}{ds}=\vec{\omega}\times\vec{\tau}_1;\quad \frac{d\vec{\nu}^1}{ds}=\vec{\omega}\times\vec{\nu}_1;\quad \frac{d\vec{\beta}_1}{ds}=\vec{\omega}\times\vec{\beta}_1.$$

Dužina luka prostorne krive

U zadacima 3402 — 3409 naći dužinu luka datih krivih.

3402. $\boldsymbol{r}\{2t,\ \ln t,\ t^2\}$ od $t=1$ do $t=10$.

3403. $\boldsymbol{r}\{a\cos t,\ a\sin t,\ a\ln\cos t\}$ od tačke $(a,\ 0,\ 0)$ do tačke

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\ \frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2}\ln a\right).$$

3404. $r\{e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t\}$ od tačke $(1, 0, 1)$ do tačke koja odgovara parametru t.

3405. $x^2=3y$, $2xy=9z$ od tačke $(0, 0, 0)$ do tačke $(3, 3, 2)$.

3406. $z^2=2ax$, $9y^2=16xz$ od tačke $(0, 0, 0)$ do tačke $\left(2a, \frac{8a}{3}, 2a\right)$.

3407. $4ax=(y+z)^2$, $4x^2+3y^2=3z^2$ od koordinatnog početka do tačke (x, y, z).

3408. $y=\sqrt{2ax-x^2}$, $z=a\ln\frac{2a}{2a-x}$ od koordinatnog početka do tačke (x, y, z).

3409. $y=a\arcsin\frac{x}{2}$, $z=\frac{1}{4}a\ln\frac{a+x}{a-x}$ od koordinatnog početka do tačke

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{a\pi}{6}, \frac{a}{4}\ln 3\right).$$

Površi

U zadacima 3410 — 3419 sastaviti jednčine tangencijalnih ravni i normala za date površi u navedenim tačkama.

3410. $z=2x^2-4y^2$ u tački $(2, 1, 4)$.

3411. $z=xy$ u tački $(1, 1, 1)$

3412. $z=\frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$ u tački $(a, a, -a$

3413. $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ u tački $(3, 4, -7)$.

3414. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ u tački $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

3415. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ u tački $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

3416. $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ u tački $(1, 2, -1)$.

3417. $3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1=0$ u tački $(1, 1, 1)$.

3418. $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$ u tački $(1, 1, 2)$.

3419. $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z$ u tački $(2, 3, 6)$.

3420. pokazati da jednačina tangencijalne ravni elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ u proizvoljnoj tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

3421. Naći tangencijalnu ravan elipsoida $x^2+2y^2+z^2=1$ paralelnu ravni $x-y+2z=0$.

3422. Naći tangencijalnu ravan elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ koja od koordinatnih osa odseca jednake pozitivne odsečke.

3423. Pokazati da se površi $x+2y-\ln z+4=0$ i $x^2-xy-8x+z+5=0$ dodiruju (tj. imaju zajedničku tangencijalnu ravan) u tački (2. —3, 1).

3424. Dokazati da se sve tangencijalne ravni površi $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ seku u jednoj tački.

3425. Sastaviti jednačine tangencijalne ravni i normalne sfere $\boldsymbol{r}\{u\cos v, u\sin v, \sqrt{a^2-u^2}\}$ u tački $\boldsymbol{r}_0\{x_0, y_0, z_0\}$.

3426. Sastaviti jednačine tangencijalne ravni i normale hiperboličnog paraboloida $\boldsymbol{r}\{a(u+v), b(u-v), uv\}$ u proizvoljnoj tački $\boldsymbol{r}_0\{x_0, y_0, z_0\}$.

3427. Dokazati da su sfere $x^2+y^2+z^2=ax$ i $x^2+y^2+z^2=by$ uzajamno normalne.

3428. Pokazati da tangencijalne ravni površi $xyz=a^3$ u svakoj njenoj tački obrazuju sa koordinatnim ravnima tetraedre konstantne zapremine i naći tu zapreminu.

3429. Pokazati da tangencijalne ravni površi $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ odsecaju od koordinatnih osa odsečke čiji zbir ima vrednost a.

3430. Za površ $z=xy$ sastaviti jednačinu tangencijalne ravni, normalne na pravu

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-1}.$$

3431. Pokazati da je za površ $x^2+y^2+z^2=y$ dužina odsečka normale između površi i ravni xOy jednaka rastojanju od koordinatnog početka do prodora normale kroz tu ravan.

3432. Dokazati da normala obrtnog elipsoida $\frac{x^2+z^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ u svakoj njegovoj tački $P(x, y, z)$ zaklapa jednake uglove sa pravama PA i PB ako je $A(0, -4, 0)$ i $B(0, 4, 0)$.

3433. Dokazati da sve normale obrtne površi $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ presecaju osu obrtanja.

3434. Za površ $x^2-y^2-3z=0$ naći tangencijalnu ravan koja prolazi kroz tačku $A(0, 0, -1)$ i paralelna je pravoj $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

3435. Na sferi $x^2+y^2+z^2-6y+4z=12$ naći tačke u kojima su tangencijalne ravni paralelne koordinatnim ravnima.

3436. Naći tangencijalnu ravan površi $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$ u proizvoljnoj tački:

a) uzimajući jednačine površi u parametarskom vidu;

b) napisavši jednačinu ove površi u obliku $z=f(x, y)$.

3437. Naći geometrijsko mesto podnožja normala povučenih iz koordinatnog početka na tangencijalne ravni obrtnog paraboloida $2pz = x^2 + y^2$.

3438. Naći geometrijsko mesto podnožja normala spuštenih iz koordinatnog početka na tangencijalne ravni površi $xyz = a^3$.

§ 4. Skalarno polje. Gradijent. Izvod u određenom pravcu

Gradijent

3439. 1) $\psi(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 1$. Naći komponente gradijenta u tački (1, 2).

2) $u = 5x^2y - 3xy^3 + y^4$. Naći komponente gradijenta u proizvoljnoj tački.

3440. 1) $z = x^2 + y^2$. Naći grad z u tački (3, 2).

2) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$. Naći grad z u tački (2, 1).

3) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$. Naći grad z u tački (x_0, y_0).

3441. 1) Naći najveći uspon (nagib) površi $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ u tački (6, 4, ln 100).

2) Naći najveći uspon površi $z = x^y$ u tački (2, 2, 4).

3442. Odrediti pravac najbržeg menjanja funkcije $\varphi(x, y, z) = x \sin z - y \cos z$ u koordinatnom početku.

3443. 1) $z = \arcsin \dfrac{x}{x+y}$. Naći ugao između gradijenata ove funkcije u tačkama (1, 1) i (3, 4).

2) Date su funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ Naći ugao između gradijenata tih funkcija u tački (3, 4).

3444. 1) Neka je $z = \ln\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$; naći tačku u kojoj je grad $z = \boldsymbol{i} - \dfrac{16}{9}\boldsymbol{j}$.

2) Neka je $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$; naći tačku u kojoj je $|\text{grad } z| = 2$.

3445. Dokazati sledeće relacije (φ i ψ su diferencijabilne funkcije, c je konstanta):

$$\text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad}\,\varphi + \text{grad}\,\psi; \qquad \text{grad}(c + \varphi) = \text{grad}\,\varphi;$$

$$\text{grad}(c\varphi) = c\,\text{grad}\,\varphi; \qquad \text{grad}(\varphi\psi) = \varphi\,\text{grag}\,\psi + \psi\,\text{grad}\,\varphi$$

$$\text{grad}(\varphi^n) = n\varphi^{n-1}\,\text{grad}\,\varphi; \qquad \text{grad}[\varphi(\psi)] = \varphi'(\psi)\,\text{grad}\,\psi.$$

3446. $z = \varphi(u, v)$, $u = \psi(x, y)$, $v = \xi(x, y)$. Pokazati da je

$$\text{grad } z = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\text{grad } u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\text{grad } v.$$

3447. 1) $u(x, y, z) = x^3 y^2 z$. Naći knmponente vektora grad u u tački (x_0, y_0, z).

2) $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Naći grad u.

3448. Pokazati da funkcija $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ zadovoljava relaciju $u = 2 \ln 2 - \ln(\text{grad } u)^2$.

3449. Dokazati da: ako su x, y, z funkcije nezavisno promenljive t onda je

$$\frac{d}{dt} f(x, y, z) = \text{grad } f \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

pri čemu je

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

3450. Koristeći obrazac izveden u prethodnom zadatku naći gradijent funkcije:

1) $f = \boldsymbol{r}^2$; 2) $f = |\boldsymbol{r}|$; 3) $f = F(\boldsymbol{r}^2)$; 4) $f = (\boldsymbol{ar})(\boldsymbol{br})$; $f = (\boldsymbol{abr})$; pri čemu su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ konstantni vektori.

Izvod u određenom pravcu

3451. 1) Naći izvod funkcije $z = x^3 - 3x^2y + 3xy + 1$ u tački $M(3, 1)$ u pravcu vektora $\overrightarrow{MP}$, ako je $P(6, 5)$.

2) Naći izvod funkcije $z = \text{arctg}\, xy$ u tački $(1, 1)$ u pravcu simetrale prvog kvadrata.

3) Naći izvod funkcije $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ u tački $(2, 1)$ u pravcu koji vodi prema koordioatncm početku.

4) Naći izvod funkcije $z = \ln(e^x + e^y)$ u kordinatnom početku u pravcu određenom uglom α prema x-osi.

3452. Naći izvod funkcije $z = \ln(x + y)$ u tački $(1, 2)$ parabole $y^2 = 4x$ u pravcu te parabole.

3453. Naći izvod funkcije $z = \text{arctg}\, \dfrac{y}{x}$ u tački $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ koja leži na krugu $x^2 + y^2 - 2x = 0$ u pravcu tog kruga.

3454. Dokazati da izvod funkcije $z = \dfrac{y^2}{x}$ u svakoj tački elipse $2x^2 + y^2 = 1$, u pravcu normale na elipsu, ima vrednost nulu.

3455. 1) Naći izvod funkcije $u = xy^2 + z^3 - xyz$ u tački $M(1, 1, 2)$ u pravcu vektora $\overrightarrow{MP}$ koji sa koordinatnim osama zaklapa uglove od $60°$, $45°$ i $60°$

2) naći izvod funkcije $w = xyz$ u tački $A(5, 1, 2)$ u pravcu vektora $\overrightarrow{AB}$ pri čemu je $B(9, 4, 14)$.

3456. Naći izvod funkcije $u = x^2y^2z^2$ u tački $A(1, -1, 3)$ u pravcu koji vodi prema tački $B(0, 1, 1)$.

3457. Dokazati da izvod funkcije $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ u proizvoljnoj tački $M(x, y, z)$ u pravcu koji od te tačke vodi prema koordinatnom početku, ima vrednost $-\frac{2u}{r}$, pri čemu je $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3458. Dokazati da je izvod funkcije $u=f(x, y, z)$ u pravcu njenog gradijenta jednak modulu tog gradijenta.

3459. Naći izvod funkcije

$$u=\frac{1}{r}, \text{ gde je } r^2=x^2+y^2+z^2$$

u pravcu njenog gradijenta.

(Ova stranica je ostavljena prazna)

3242. $x^3+2y^3-xy-h(3x^2-y)+k(6y^2-x)+3xh^2-hk+6yk^2+h^3+2k^3$.

3243. $\Delta z=15h^2-6hk+k^2+h^3$.

3244. $\Delta z=-2h+7k-4h^2+4hk+2k^2-2h^3-h^2k+\frac{5}{2}hk^2+\frac{1}{4}k^3-h^3k+$

$+\frac{1}{2}h^2k^2+\frac{1}{4}hk^3;\quad f(1{,}02;\ 2{,}03)\approx 2{,}1726$.

3245. $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+(2Ax+Dy+Fz)h+(2By+Dx+Ez)k+$

$+(2Cz+Ey+Fx)l+Ah^2+Bk^2+Cl^2+Dhk+Ekl+Fhl$.

3246. $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\right.$

$\left.-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\right.$

$+3\sin\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)y-\frac{\pi}{4}\Big)^2+$

$\left.+\sin\xi\cos\eta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right]$.

3247. $z=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+\cdots;\quad z\approx 1{,}1021$.

3248. $e^x\left[\sin y+h\sin y+k\cos y+\frac{1}{2}(h^2\sin y+2hk\cos y-k^2\sin y)+\right.$

$\left.+\frac{1}{6}(h^3\sin y+3h^2k\cos y-3hk^2\sin y-k^3\cos y)\right]+\cdots;\quad z_1\approx 1{,}1051$.

3249. $y+xy+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3+\cdots$

3250. $y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+\frac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+\cdots$

3251. $1+(x+y)+\cdots+\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+\cdots$

3252*. $x-y-\frac{1}{3}(x^3-y^3)+\frac{1}{5}(x^5-y^5)-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}(x^{2n+1}-y^{2n+1})+\cdots$ uzeti u obzir da je $\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y$.

3253. $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^ny^m}{mn}$.

3254. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+y)^n-x^n-y^n}{n}$. **3255.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

3256. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^my^{2n}}{m!(2n)!}$.

3257. $z=1+(x-1)+\frac{1}{4}(y-1)-\frac{1}{8}(x-1)(y-1)+\frac{9}{64}(y-1)^2+\cdots$

3259. $(0, 0), \left(-\frac{5}{3}, 0\right), (-1, 2), (-1, -2)$.

3260. $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. 3261. $(0, 0), (0, a), (a, 0), \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

3262. $(0, 0), (0, 2b), (a, b), (2a, 0), (2a, 2b)$. 3263. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

3264. $\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$. 3265. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. 3266. $(2, 1, 7)$. 3267. $(6, 4, 10)$.

3268. A i C su tačke maksimuma, B — tačka minimuma; u okolini tačke D površ ima oblik „sedla", duž prave EF funkcija zadržava konstantnu vrednost.

3269. $(-2, 0), \left(\frac{16}{7}, 0\right)$. 3270. $(1, 1), (-1, -1)$.

3271*. Da bismo se uverili da je nađena tačka — tačka maksimuma dovoljno je predstaviti funkciju u obliku $z=10-(x-y)^2-2x^2-y^2$.

3272. $(2, -2)$. 3273. $(-1, 1)$. 3277. U tački (6,4) funkcija dostiže maksimum.

3278. U tački (0, 0) nema ekstremuma; u tački (1, 1) funkcija dostiže minimum.

3279. Najveću i najmanju vrednost funkcija dostiže na granici oblasti: najveću $z=4$ u tačkama (2, 0) i (—2, 0, a najmanju, $z=-4$, u tačkama (0, 2) i (0, —2). U stacionarnoj tački (0, 0) nema ekstremuma.

3280. Najveća vrednost $z=17$ u tački (1, 2); najmanja vrednost $z=-3$ u tački (1, 0); stacionarna tačka (—4, 6) leži van date oblasti.

3281. Najveća vrednost $z=4$ u stacionarnoj tački (2, 1) (ova tačka je, prema tome, tačka ekstremuma); najmanja vrednost $z=-64$ u tački (4, 2) koja leži na granici oblasti.

3282. Najmanju vrednost $z=0$ funkcija dostiže u tački (0, 0); najveću vrednost $z=\frac{3}{e}$ u tačkama $(0, \pm 1)$.

3283. $z_{\max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ u tački $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $z_{\min}=0$ u tački (0, 0) (na granici oblasti).

3284. Svi sabirci moraju biti jednaki među sobom.

3285. Svi množitelji moraju biti jednaki među sobom.

3286. $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$. 3287. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$.

3288. $x=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $y=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$. 3289. $(3, \sqrt{39}, 0); (3, -\sqrt{39}, 0)$.

3290. Kocka. 3291. U tački (1, 1) je $z=2$ — minimum.

3292. (a, a) ili $(-a, -a)$, $z=a^2$ (maksimum), $(a, -a)$ ili $(-a, a)$, $z=-a^2$ (minimum).

3293. $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, $z=-\frac{\sqrt{2}}{a}$ (minimum), $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$, $z=\frac{\sqrt{2}}{a}$ (maksimum).

3294. Stacionarne tačke $x=-\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{b}{a}$, $y=\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{a}{b}$.

3295. $(3, 3, 3)$, $u=9$ (minimum).

3296. Kad su vrednosti dveju nezavisno promenljivih $=2$, a vrednost treće $=1$, funkcija dostiže minimum $=4$; kad su vrednosti dveju nezavisno promenljivih $=\frac{4}{3}$, a vrednost treće $\frac{7}{3}$, funkcija dostiže maksimum $=\frac{112}{27}$.

3297*. Treba naći minimum funkcije $\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}$ pod uslovom $x_1+x_2+\cdots+x_n=A$. Uopšte, važi relacija $\frac{\Sigma x_i^k}{n}>\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^k$. za $k>1$.

3299. $u_{\min}=\frac{abc}{bc+ca+ab}$ za $x=\frac{bc}{bc+ca+ab}$; $y=\frac{ac}{bc+ac+ab}$; $z=\frac{ab}{bc+ac+ab}$.

3300. $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{1}{3}$, $z=\pm\frac{1}{6}$. 3301. $\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$.

3302. $(3, -1, 1)$. 3303. a) $(-2, 0, 0)$; b) $(2, 0, 0)$.

3304. Kocka. 3305. Kocka. 3306. $\frac{8\,abc}{3\sqrt{3}}$.

3307. Ako je R poluprečnik osnove šatora, H — visina cilindričnog dela, a h — visina konusnog završetka, onda moraju važiti sledeće relacije: $R=\frac{h\sqrt{5}}{2}$, $H=\frac{h}{2}$.

3308. Ako je b osnovica, l — krak, a α — ugao na osnoviii trapeza, onda mora biti $l=b=\frac{2\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$, pri čemu je A data površina preseka; tada je kvašena površina $u=2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{A}\approx 2{,}632\sqrt{A}$.

3309. Kocka. 3310. Svaka od osnovnih ivica je $2\alpha+\sqrt[3]{2v}$, a visina je dva puta manja $\alpha+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}$.

3311. a^3 (kocka). 3312. Minimalna površina ima vrednost $3\sqrt{3}\,ab$.

3313. $x=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$, $y=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$. 3314. $\left(-\frac{5}{9}-\frac{1}{9}\right)$. 3315. $(3, 5)$. 3316. $z_{\max}=2$.

3317. Stranice trougla su $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$ i $2\sqrt{S}$.

3318. Visina je $\frac{H}{3}$, osnovne ivice su $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ i $\frac{2b\sqrt{2}}{3}$, a zapremina $V=\frac{8}{27}abH$.

3319. Tetraedar.

3320. Normala elipse u traženoj tački mora biti normalna na pravoj koja spaja date tačke.

3321. Normalu povući u tački sa koordinatama

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \pm b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right).$$

3322. $\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$; $\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$. 3323. $2\sqrt{2}$.

3324. $x+y=2$; $y=x$. **3325.** $x-y+a=0$; $x+y-3a=0$.

3326. $x+2y-1=0$; $2x-y-2=0$.

3327. $x-y+2=0$; $x+y-2=0$. **3328.** $(0, 0)$. **3329.** $(0, 0)$.

3330. $(0, 0)$. **3331.** $(a, 0)$. **3332.** $(0, a)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$.

3333. $(2, 0)$, $(-2, 0)$. **3334.** $(0, 3)$, $(-3, 0)$, $(-6, 3)$.

3335. $(0, 0)$ je dvostruka tačka. **3336.** $(0, 0)$ je izolovana tačka.

3337. $(0, 0)$ je krajnja tačka krive.

3338. $(k\pi, 0)$ su povratne tačke $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

3339. $(0, 0)$ je povratna tačka. **3340.** $(0, 0)$.

3341. $x=-f'(a)$, $y=f(a)$; $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

3342. $16y^3+27x^4=0$. **3343.** $y^2=4ax$. **3344.** $y=\frac{x}{2}$ i $y=\frac{x}{2}$.

3345. $y=-\frac{x^4}{4}$. **3346.** $y=0$ i $16y=x^4$.

3347. $y=x$ i $y=x-\frac{4}{27}$. Prva prava je geometrijsko mesto singularnih tačaka, druga—obvojnica.

3348. $x^2+\frac{2}{3\sqrt{3}}y^3=0$ i $x^2-\frac{2}{3\sqrt{3}}y^3=0$. **3349.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=d^{\frac{2}{3}}$.

3350. 4 prave $x\pm y=\pm R$. **3351,** $2by(x^2+y^2)+x^2=0$.

3352. Parabola $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

3353. Cikloida $x=\frac{R}{2}(t-\sin t)$, $y=\frac{R}{2}(1-\cos t)$.

3354. Elipsa $x^2+\frac{y^2}{2}=R^2$. **3355.** Hiperbola $xy=\frac{a}{4}$.

3357. Evoluta parabole $y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3$.

3358. Hiperbole $xy=\frac{1}{2}$ i $xy=-\frac{1}{2}$.

3361. a) $2\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=2|\mathbf{r}|\cdot\frac{d|\mathbf{r}|}{dt}$; b) $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2+\mathbf{r}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.

c) $\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$; d) $\left(\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right)$.

3362. Iz jednačine $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\alpha(t)\mathbf{r}$ sledi:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d\alpha}{dt}\mathbf{r}+\alpha\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\left(\frac{d\alpha}{dt}+\alpha^2\right)\mathbf{r}=\beta(t)\cdot\mathbf{r} \text{ itd.}$$

3363. Diferenciramo li jednakost $\mathbf{r}^2=\text{const}$ (vidi zad. 3361) dobijamo $\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0$. Tangenta sferne krive (tj. krive koja leži na sferi) normalna je na poluprečniku sfere koji odgovara dodirnoj tački. Važi i obrnuti stav.

3368. $\frac{dr}{dx}=\frac{dr}{du}\varphi'$; $\frac{d^2r}{dx^2}=\frac{d^2r}{du^2}\varphi'^2+\frac{dr}{du}\varphi''$;

$$\frac{d^3r}{dx^3}=\frac{d^3r}{du^3}\varphi'^3+3\frac{d^2r}{du^2}\varphi'\varphi''+\frac{dr}{du}\varphi'''.$$

3370. Iz jednakosti $a\frac{dr(\tau)}{dt}=0$, u kojoj je $t_1<\tau<t_2$, sledi da na zatvorenoj (zbog $r(t_1)=r(t_2)$) krivoj postojati tačka u kojoj je tangenta normalna na bilo kojoj unapred zadanoj pravoj.

3371. Hodograf brzine $v\{a\cos t,\ a\sin t,\ 2bt\}$ je zavojnica, hodograf ubrzanja $w\{-a\sin t,\ a\cos t,\ 2b\}$ je kružna linija.

3372. Skalarno množenje sa a i sa r daje: $a\frac{dr}{dt}=0$, $r\frac{dr}{dt}=0$. Ovavde proizilazi: $ar=\text{const}$ — jednačina ravni, i $r^2=\text{const}$ — jednačina lopte. Tražena jednačina je krug čija je ravan normalna na vektor a.

3374. Elipsa. Brzina će biti maksimalna u momentu kad se pokretna tačka bude nalazila na kraju male poluose, a minimalna kad se tačka bude nalazila na kraju velike poluose. Ubrzanje će biti maksimalno (minimalno) u trenutku kad brzina bude minimalna (maksimalna).

3375. Komponente brzine su $\frac{d\rho}{dt}$, $\rho\frac{d\varphi}{dt}$, $\rho\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}$. Uputstvo: naći skalarne proizvode $\frac{dr}{dt}e_\rho$; $\frac{dr}{dt}e_\varphi$; $\frac{dr}{dt}e_\theta$.

3376. $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{1}$; $t^2x+ty+z=\frac{t^6}{4}+\frac{t^4}{3}+\frac{t^2}{2}$.

3377. $\frac{x-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-a\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}=\frac{z-\frac{k}{8}}{\frac{k}{\pi}}$; $-x+y+\frac{k}{\pi a\sqrt{2}}z=\frac{k^2}{8\pi a\sqrt{2}}$.

3378. $x-6a=\frac{y-18a}{6}=\frac{z-72a}{36}$; $x+6y+36z=2706a$.

3379. $\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $x+y+\sqrt{2}\cdot z=\frac{\pi}{2}+4$.

3380. $\frac{x-1}{12}=\frac{x-3}{-4}=\frac{z-4}{3}$; $12x-4y+3z-12=0$.

3381. $\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4}$; $27x+28y+4z+2=0$.

3382. $\frac{x-x_0}{z_0}=\frac{y-y_0}{z_0}=\frac{z-z_0}{y_0+x_0}$; $\frac{x+y}{x_0+y_0}+\frac{z}{z_0}=2$.

3383. $\frac{x-x_0}{y_0^2z_0^2}=\frac{y-y_0}{x_0^2y_0^2}=\frac{z-z_0}{-x_0^2y_0^2}$; $\frac{x-x_0}{x_0^2}+\frac{y-y_0}{y_0^2}-\frac{z-z_0}{z_0^2}=0$.

3384. $r_0\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ e^{\frac{\pi}{6}}\right\}$.

3385. $6x-8y-z+3=0$; $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-1}{-8}=\dfrac{z-1}{-1}$; $\dfrac{x-1}{31}=\dfrac{y-1}{26}=\dfrac{z-1}{-22}$.

3386. $\sqrt{b}\,(x-x_0)-\sqrt{a}\,(y-y_0)=0$; $\dfrac{x-x_0}{\sqrt{b}}=\dfrac{y-y_0}{-\sqrt{a}}=\dfrac{z-z_0}{0}$;

$$\frac{x-x_0}{\sqrt{2az_0}}=\frac{y-y_0}{\sqrt{2bz_0}}=\frac{z-z_0}{-(a+b)}.$$

3387. $\dfrac{1}{e}x-ey-\sqrt{2}\,z+2=0$; $\dfrac{x-e}{-\dfrac{1}{e}}=\dfrac{y-\dfrac{1}{e}}{e}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{x-e}{1}=\dfrac{y-\dfrac{1}{e}}{1}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,1}$.

3389. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$; $2x-y+3z-5=0$; $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$;

$3x+3y-z-2=0$; $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{-9}$; $8x-11y-9z+1=0$.

3390. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$; $x-y=0$;

$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$; $z=1$ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{0}$; $x+y-2=0$.

3391. $\dfrac{x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}}=\dfrac{z-1}{4}$; $\sqrt{2}x-\sqrt{2}\,y+4z=4$;

$\dfrac{x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{z-1}{1}$; $\sqrt{2}\,x+3\sqrt{2}\,y+z-5=0$;

$\dfrac{x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{13}=\dfrac{y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-3}=\dfrac{z-1}{-4\sqrt{2}}$; $-13x+3y+4\sqrt{2}\,z+\sqrt{2}=0$.

3392. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-13}{3}=\dfrac{z}{6}$; $2x+3y+6z=37$; $\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-13}{2}=\dfrac{z}{-3}$;

$6x+2y-3z=20$; $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-13}{-6}=\dfrac{z}{2}$; $3x-6y+2z=-81$.

3393. U svakoj tački krive jednačina oskulatorne ravni glasi $3x-2y-11=0$, tj. sva kriva leži u toj ravni.

3394. Oskulatorna ravan je ista u svim tačkama krive; njena je jednačina

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3395. $\dfrac{\mathrm{ch}^2\,t}{\mathrm{sh}\,t}$. **3396.** $R=\sqrt{2}\,\mathrm{cosec}\,2t$.

3398. $k=\sqrt{\dfrac{(y'z''-z'y'')^2+y''^2+z''^2}{(1+y'^2+z'^2)^3}}$.

3399. $\vec{\tau}_1=\dfrac{r'}{|r'|}$, $\vec{\beta}_1=\dfrac{r'\times r''}{|r'\times r''|}$, $\vec{\nu}_1=\dfrac{(r'\times r'')\div r'}{|r'|\cdot|r'\times r''|}$.

3400. $\vec{\tau}_1=\vec{\nu}_1\times\vec{\beta}_1$; $\vec{\nu}_1=\vec{\beta}_1\times\vec{\tau}_1$; $\vec{\beta}_1=\vec{\tau}_1\times\vec{\nu}_1$.

3401. Traženi vektor w (ako postoji) može se predstaviti u obliku

$$\vec{\omega}=(\overrightarrow{\omega\tau_1})\vec{\tau}_1+(\overrightarrow{\omega\nu_1})\vec{\nu}_1+(\overrightarrow{\omega\beta_1})\vec{\beta}_1. \tag{1}$$

Iz uslova zadatka (uzimajući u obzir i Frene — ove obrasce) sledi da je

$$\vec{\omega}\times\vec{\tau}_1=k\vec{\nu}_1;\quad \vec{\omega}\times\vec{\nu}_1=-k\vec{\tau}_1+T\vec{\beta}_1;\quad \vec{\omega}\times\vec{\beta}_1=-T\vec{\nu}_1. \tag{2}$$

Skalarnim množenjem ovih jednakosti respektivno sa $\vec{\nu}_1$, $\vec{\beta}_1$, $\vec{\tau}_1$ nalazimo da je $\vec{\omega}\cdot\vec{\tau}_1=T$, $\vec{\omega}\cdot\vec{\nu}_1=0$, $\vec{\omega}\cdot\vec{\beta}_1=k$, i prema tome $\vec{\omega}=T\vec{\tau}_1+k\vec{\beta}_1$. Kad ovu vrednost za $\vec{\omega}$ uvrstimo u obrasce (2) pokazaće se da ovaj vektor zadovoljava uslove zadatka.

3402. $99+\ln 10\approx 101{,}43$. **3403.** $a\ln(1+\sqrt{2})=a\ln\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{8}$.

3404. $\sqrt{3}(e^t-1)$. **3405.** 5. **3406.** $4a$. **3407.** $z\sqrt{2}$.

3408. $a\ln\dfrac{\sqrt{2a}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}-\sqrt{x}}$. **3409.** $\dfrac{a}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$.

3410. $8x-8y-z=4$; $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-1}{-8}=\dfrac{z-4}{-1}$.

3411. $x+y-z-1=0$; $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. **3412.** $z+a=0$, $x=a$, $y=a$.

3413. $17x+11y+5z=60$; $\dfrac{x-3}{17}=\dfrac{y-4}{11}=\dfrac{z+7}{5}$.

3414. $x-y+2z-\dfrac{\pi}{2}=0$; $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$.

3415. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\sqrt{3}$;

$$a\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)=b\left(y-\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)=c\left(z-\frac{c\sqrt{3}}{3}\right).$$

3416. $x+11y+5z-18=0$; $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+1}{5}$.

3417. $3x-2y-2z+1=0$; $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-2}$.

3418. $2x+y+11z-25=0$; $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{11}$.

3419. $5x+4y+z-28=0$; $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-6}{1}$.

3421. $x-y+2z=\sqrt{\frac{11}{2}}$ i $x-y+2z=-\sqrt{\frac{11}{2}}$.

3422. $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

3424. Sve ravni prolaze kroz koordinatni početak.

3425. $x_0x+y_0y+z_0z=a^2$; $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$.

3426. $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=2(z+z_0)$; $\frac{a(x-x_0)}{bx_0}=-\frac{b(y-y_0)}{ay_0}=\frac{z-z_0}{-2ab}$.

3428. $\frac{9}{2}a^3$. **3430.** $2x+y-z=2$. **3434.** $4x-2y-3z=3$.

3435. Paralelna ravni xOy u tačkama $(0, 3, 3)$ i $(0\ 3, -7)$; ravni yOz u tačkama $(5, 3, -2)$ i $(-5, 3, -2)$; ravni xOz u tačkama $(0, -2, -2)$ i $(0, 8, -2)$.

3436. a) $6u_0v_0x-3(u_0+v_0)y+2z+(u_0+v_0)(u_0^2-4u_0v_0+v_0^2)=0$;

b) $3(x_0^2-y_0)x-3x_0(y+y_0)+2z+4z_0=0$.

3437. $2z(x^2+y^2+z^2)+p(x^2+y^2)=0$. **3438.** $(x^2+y^2+z^2)^3=27a^3xyz$.

3439. 1) $\{-2, 1\}$; 2) $\{10xy-3y^3, 5x^2-9xy^2+4y^3\}$.

3440. 1) $6i+4j$; 2) $\frac{1}{3}(2i+j)$; 3) $\frac{-y_0i+x_0j}{x_0^2+y_0^2}$.

3441. 1) $\operatorname{tg}\varphi\approx0{,}342$, $\varphi\approx18°52'$; 2) $\operatorname{tg}\varphi\approx4{,}87$, $\varphi\approx78°24'$.

3442. Negativni deo y-ose.

3443. 1) $\cos\alpha\approx0{,}99$, $\alpha\approx8°$; 2) $\cos\alpha\approx-0{,}199$, $\alpha\approx101°30'$.

3444. 1) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}\right)$; 2) tačke koje leže na krugu $x^2+y^2=\frac{2}{3}$.

3447. 1) $\{3x_0^2y_0^2z_0, 2x_0^3y_0z_0, x_0^3y_0^2\}$; 2) $\frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{r}{|r|}$, gde je r — vektor položaja tačke.

3450. 1) $2r$; 2) $2\frac{r}{|r|}$; 3) $2F'(r^2)r$; 4) $a(br)+b(ar)$; 5) $a\times b$.

3451. 1) 0; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sqrt{5}$; 4) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2}$.

3452. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **3453.** $\frac{1}{2}$. **3455.** 1) 5; 2) $\frac{98}{13}$. **3456.** 22. **3459.** $\frac{1}{r^2}$.